Estudio de teselaciones semirregulares 8-8-4 y 12-12-3

Julia Rodríguez Montalvo
Damian Stodulski
Iván Gutiérrez Giraldo
1ºD BI

Índice:

1.Introducción:

Durante este pequeño trabajo de investigación realizaremos un estudio de dos polígonos semirregulares, en concreto las teselaciones 12-12-3 (dodecágonos y triángulos) y 8-8-4 (octógonos y cuadrados). Estudiaremos cómo se forman, su área y los movimientos que sufren los polígonos regulares que las forman. Por último buscaremos relación entre ambas teselaciones, recalcando sus similitudes y diferencias entre ellos.

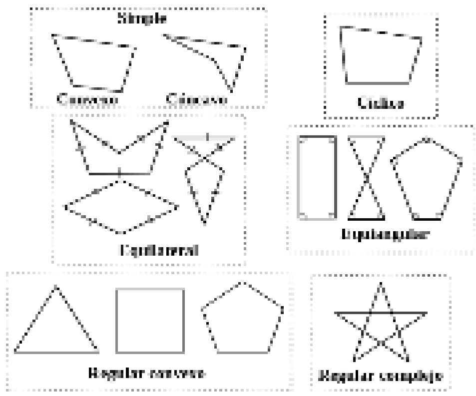
2.Fundamento teórico :

Polígono: definiciones y tipos

La RAE define polígono como “porción de plano limitada por líneas rectas”.[1]

Otras fuentes los definen de la siguiente manera: “Se entiende por polígono aquella forma geométrica que esté compuesta por muchos lados, pudiendo estar los mismos dispuestos de manera regular o irregular. La palabra polígono proviene del griego y significa “muchos ángulos”. Los polígonos son formas planas que son, además, cerradas y que normalmente tienen a partir de tres lados en adelante.[2]

Imagen 1



Autor anónimo(2016)

https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgono

Los polígonos pueden ser regulares o irregulares. Existen varios tipos de polígonos según su número de lados (triángulo [tres lados], cuadrilátero [cuatro lados], hexágono [seis lados] o su contorno (simple, cóncavo, equilátero, estrellado).

[1] Real Academia Española. (2016). *Polígono*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://dle.rae.es/?id=TXv6DAs

[2] ABC. (2016). *Definción de polígono* consultado el 17 de marzo de 2016 en http://www.definicionabc.com/ciencia/poligono.php

Teselaciones: definición y clasificación

Una teselación es un patrón compuesto de figuras que recubren una superficie completamente. Este método recubre esa superficie de manera que ninguna de las figuras que lo forman se superpongan y que no exista ningún espacio sin rellenar.[3]

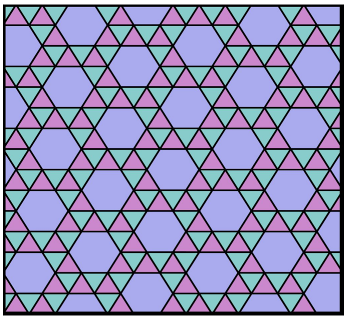
Las teselaciones, según el tipo de polígonos que las compongan, se pueden clasificar como teselaciones regulares, compuestos por un solo tipo de polígono regular (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos), teselaciones semiregulares, compuestos por varios tipos de polígonos regulares (triángulos y dodecágonos [3-12-12], cuadrados y octógonos [8-8-4]) y teselaciones irregulares, compuestas por polígonos irregulares.

Imagen 3:

Teselaciones semiregulares

Una teselación semiregular es aquella compuesta por polígonos regulares. Todos los vértices que se forman en la teselación contienen un patrón de vértices de los polígonos determinados. Por ejemplo, en los vértices de una teselación 3-4-6-4 confluyen vértices de un triángulo, de dos cuadrados diferentes y de un hexágono. La suma de los ángulos que confluyen en el vértice es de 360º.

Teselación 3-3-3-3-6



Teselación 3-3-3-4-4

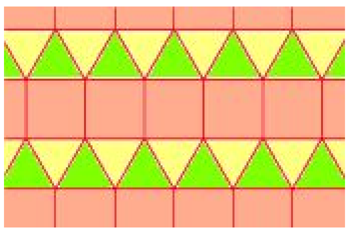


Imagen 4:

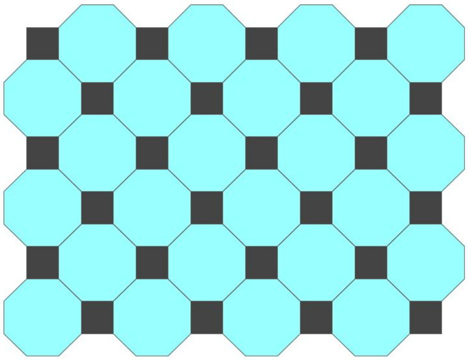
[3] Wordpress. (2016). *Definición de teselación*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://definicion.de/teselacion/

En este trabajo vamos a estudiar las teselaciones semiregulares 3-12-12 y 4-8-8.

Teselaciones semirregulares 3-12-12 y 4-8-8

La teselación semirregular 4-8-8 está formada por un conjunto de cuadrados y octógonos.

Mediante la notación de Schläfli, los mosaicos semiregulares se pueden expresar indicando el número o tipo de polígonos que confluyen en cada vértice, mediante la notación n^p , donde *n* son los lados de un polígono y *p* es el número de polígonos de ese tipo en el vértice señalado.



El mosaico 4-8-8 se expresaría entonces: $4^1 - 8^2$ Imagen 5*

Una teselación semirregular 3-12-12 está formada por un conjunto de de triángulos equiláteros y dodecágonos regulares.

Con la notación de Schläfli, el mosaico 3-12-12 se expresaría entonces: 3^1-12^2

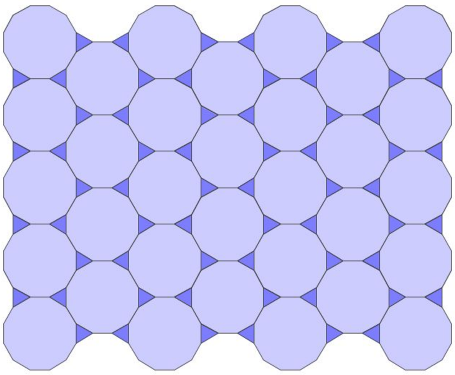


Imagen 6*

En la creación de mosaicos, el conocimiento de los ángulos de los polígonos nos permite conocer las combinaciones de polígonos que podemos realizar. Los vértices de los mosaicos están compuestos por los ángulos interiores de los polígonos que confluyen, sumando siempre 360º.

De este modo podemos saber que a partir de uno o varios triángulos, por ejemplo, podemos expresar combinaciones con hexágonos, cuadrados o dodecágonos.

<u>Movimientos geométricos:</u>

Traslación

La traslación es una transformación geométrica que produce que los puntos de una figura se muevan en el plano con un mismo vector de posición. Al moverse los puntos, también se mueve la figura, siendo la trasladada igual que la original.[4]

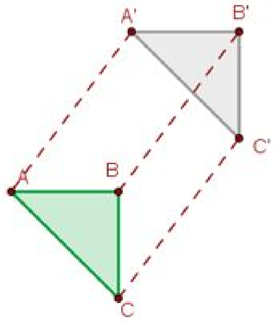
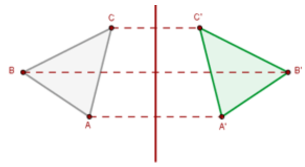


Imagen 7[4]

Simetría

Imagen 8[5]



En el mosaico 8-8-4 podemos observar el movimiento de los cuadrados pensando en la simetría axial, que consiste en que un objeto o figura tiene todos sus puntos correspondientes reflejados de manera simétrica respecto a un eje.[5]

Rotación

Hablamos de rotación cuando todos los puntos de una figura giran en la misma dirección en mismo número de grados con respecto a un punto fijo denominado centro de rotación.[6]
Existen dos tipos de rotación según su dirección:

- Retrógrado si se trata de un giro en el sentido de las agujas del reloj.
- Directo si se trata de un giro en el sentido contrario a las agujas del reloj.

[4]Autor anónimo Traslación consultado el 29 de marzo de 2016 http://www.vitutor.com/geo/vec/c_2.html

[5] Autor anónimo Simetría axial consultado el 29 de marzo de 2016 http://www.vitutor.com/geo/vec/c_5.html

[6] Ortega, R. (2012). *Traslación y rotación*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://es.slideshare.net/BreNCairo/rotacin-y-traslacion

3.Procesamiento matemático

A continuación, realizaremos un estudio matemático de ambas teselaciones.
Comenzaremos con un estudio de los vértices que confluyen entre los polígonos regulares que forman las teselaciones.
El vértice se forma por la suma de los ángulos interiores de los polígonos.

$$V\acute{e}rtice = 360^{o} = \beta + \alpha + \theta \ldots$$

Siendo $\alpha, \beta\ y\ \theta$ los ángulos interiores de los polígonos.

Para hallar el ángulo interno de los polígonos que conforman las teselaciones nos basamos en la siguiente fórmula.

$$\frac{n-2}{n} \times 180^{o}$$

Siendo n el número de lados del polígono

Ahora, aplicaremos estas fórmulas a nuestros polígonos semirregulares . En primer lugar la teselación de dos dodecágonos y un triángulo (12-12-3). Sustituimos los valores en las fórmulas.

Ángulo interno de un dodecágono:
Por lo que n= 12
Su ángulo lo denominamos α

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \times 180^{o} = \frac{12-2}{12} \times 180^{o} = 150^{o}$$

Ángulos interno de un triángulo:
Por lo que n=3
Su ángulo lo denominamos β

$$\beta = \frac{n-2}{n} \times 180^{o} = \frac{3-2}{3} \times 180^{o} = 60^{o}$$

Conociendo esta información, podemos comprobar que la suma de estos ángulo es 360 º completando el vértice.

$$Vértice = \beta + \alpha + \alpha = \beta + 2\alpha = 60º + 2 \times 150º = 360º$$

A continuación realizaremos el mismo proceso con el polígono semirregular formados por dos octógonos y un cuadrado (8-8-4)

Ángulo interno de un cuadrado:
Siendo n=4
Denominaremos al ángulo α

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \times 180º = \frac{4-2}{4} \times 180º = 90º$$

Ángulo interno de un octógono
Por lo que n=8
Su ángulo lo denominaremos β

$$\beta = \frac{n-2}{n} \times 180º = \frac{8-2}{8} \times 180º = 135º$$

Conociendo la medida de los ángulos internos de ambos polígonos regulares (octógono y cuadrado) comprobaremos que la suma de los ángulos internos de dos octógono y un cuadrado completan el vértice de 360º.

$$Vértice = \beta + \beta + \alpha = 2 \times \beta + \alpha = 2 \times 135º + 90º = 360º$$

Área de los polígono semiregulares

Para conocer el área total de la teselación necesitamos conocer el área de cada uno de los polígono regulares (octágono, octógono, cuadrado y triángulo) . Hallaremos su área teniendo en cuenta que todos sus lados miden 1 cm.

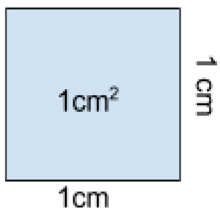
1.Area poligono semirregular 884

Comenzaremos con el área de la teselación 884, comenzando por el área del cuadrado

Área de un cuadrado

$$A_1 = lado \times lado = 1 \times 1 = 1\ cm^2$$

Imagen 9*



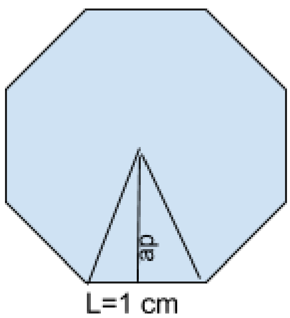
Área de un octógono

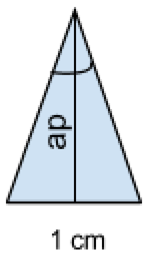
$$A_2 = \frac{perimetro \times apotema}{2} = 4 \times L \times ap$$

Siendo L = la longitud de sus lados y ap= apotema

Conociendo sus lados (L = 1 cm) necesitamos averiguar la apotema.

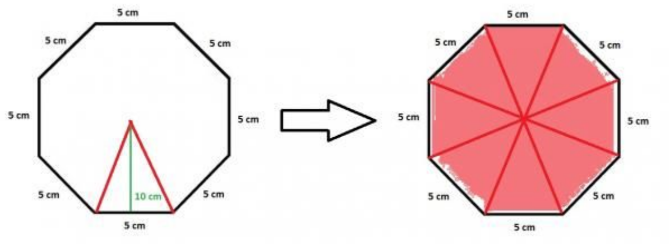
Imagen 10* Imagen 11*





Para hallar la apotema del octógono usaremos relaciones trigonométricas sobre el triángulo extraído.
Para comenzar, necesitamos averiguar la medida del ángulo superior del triángulo , el que cuyo vértice es el centro del polígono, a este ángulo lo denominaremos α.
Sabiendo que es un octógono, sabemos que el ángulo central de 360º se divide en 8 ángulo iguales al extraer los 8 triángulos que forman el octógono.

Imagen 12*



Por ello podemos suponer lo siguiente

$$\alpha = \frac{360º}{8} = 45º$$

Tras esto podemos usar las razones trigonométricas para hallar la apotema

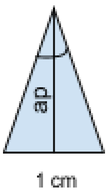


Imagen 13*

Dividimos el triángulo a la mitad por la apotema, transformándolo en un triángulo rectángulo cuyos catetos son la apotema y la mitad de la medida de su lado y cuyo ángulo superior es la mitad de 45º , es decir 22,5º.

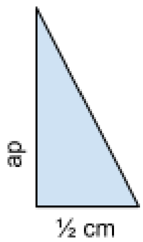


Imagen 14*

Teniendo estos datos podemos hallar la apotema usando la tangente del ángulo hallado.

$$tg\ (\tfrac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{L}{2}}{ap} \qquad ap = \frac{L}{2 \times tg\ (\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{2\times\ tg\ (22{,}5º)} \simeq 1,21\ cm$$

Conociendo la apotema podemos hallar el área del octógono

$$A_2 = \frac{perimetro \times apotema}{2} = 4 \times L \times ap$$

Sustituimos los valores

$$A = 4 \times 1 \times 1,21 = 4,84\ cm^2$$

A continuación, tras averiguar el área de cada uno de los polígonos regulares que forman esta teselación formulamos el área de la teselación al completo. El área de la teselación es directamente proporcional al número de polígonos por los que esté formado, es decir el área depende totalmente del número de octógonos y de cuadrado que lo formen.

Tomando esta teselación de referencia, hallaremos su área teniendo en cuenta que consta de 24 octógonos y 24 cuadrados.

A_{total}= 24 × A_1+ 24 × A_2

A_{total} = 24 × 1 + 24 × 4,84 =2787,84 cm^2

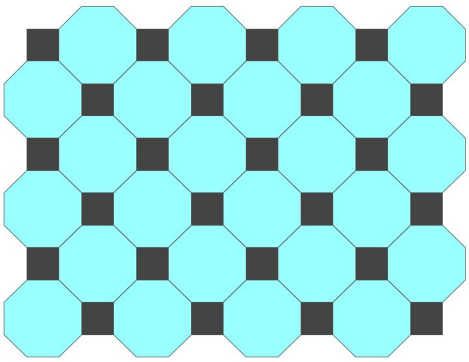


Imagen 15 *

2. Área del polígono semirregular 12-12-3

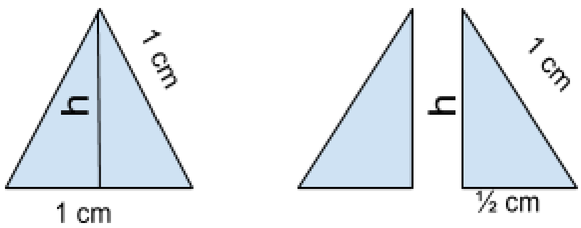
Hallaremos el área de esta teselación de la misma forma que la anterior , comenzaremos averiguando las áreas de cada uno de los polígonos. De nuevo sus lados miden 1 cm.

Área del triángulo isósceles:

$$A_3 = \frac{base \times altura}{2}$$

Para conocer la altura de este triángulo usaremos el teorema de Pitágoras.
En primer lugar dividiremos el triángulo a la mitad formando dos triángulos rectágulos de forma que uno de sus catetos sea la altura.

Imagen 16



De forma que la altura denominada h es:

$$h = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que el área del triangulo es, sustituyendo los datos obtenidos:

$$A_3 = \frac{base \times altura}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0,43\ cm^2$$

Posteriormente, hallaremos el área del dodecágono.

$$A_4 = \frac{perimetro \times apotema}{2} = 6 \times L \times ap$$

Conociendo el lado (L= 1 cm) necesitamos conocer la medida de la apotema. Para ello usaremos razones trigonométricas sobre un triangulo extraído.

El ángulo de este triángulo, que denominaremos β , cuyo vértice es el centro del polígono medirá:

$$\beta = \frac{360^{o}}{12} = 30^{o}$$

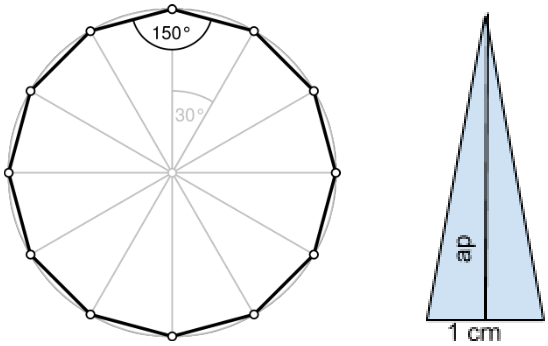


Imagen 17*

A continuación, con el fin de averiguar la apotema dividiremos el triángulo por la mitad de forma que la apotema quede como uno de los catetos del triángulo rectángulo formado.

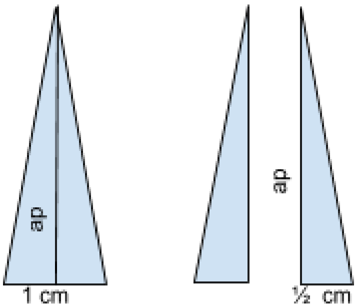


Imagen 18*

Conociendo los siguientes datos del triángulo :

Base = 0,5 cm

Ángulo opuesto a la base= $\frac{\beta}{2} = \frac{30}{2} = 15^{o}$

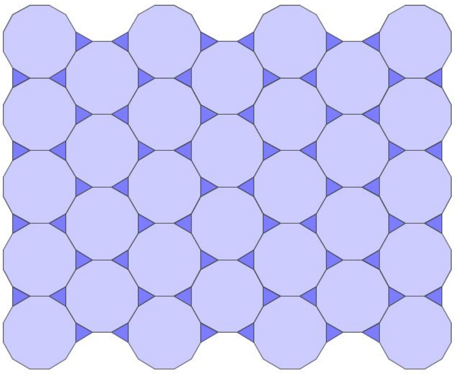
Hallamos la apotema

$$tg\ (\frac{\beta}{2}) = \frac{\frac{L}{2}}{ap} \qquad ap = \frac{L}{2 \times tg\ (\frac{\beta}{2})} = \frac{1}{2\times\ tg\ (15^{o})} \simeq 1,87\ cm$$

Tras la obtención de la medida de la apotema, podemos hallar el área del dodecágono.

$$A_4 = \frac{perimetro \times apotema}{2} = 6 \times L \times ap = 6 \times 1 \times 1,87 = 11,22\ cm^{2}$$

Por tanto, sabiendo el área de los polígonos regulares , triángulo y dodecágono, que forman esta teselación podemos llegar a conocer el área total de la misma. El área está directamente ligada con el número de polígonos que conforman la teselación, por lo que el número de polígonos y el área son directamente proporcional. Nosotros estudiaremos el caso concreto de la siguiente teselación.



En ella encontramos 22 dodecágonos y 62 triángulos.

$A_{total} = 62 \times A_3 + 22 \times A_4$

$A_{total} = 62 \times 0{,}43 + 22 \times 11{,}22 = 273.5\ cm^2$

Imagen 19*

<u>Movimientos en la teselación</u>

Comenzaremos estudiando los movimientos que sufren los polígonos regulares dentro de la teselación formada por octógonos y cuadrados (8-8-4) y en la teselación formada por dodecágonos y triángulos (12-12-3)

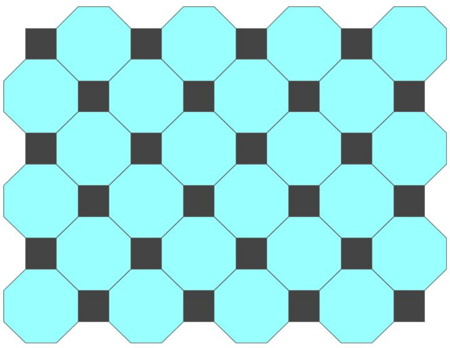


Imagen 20*

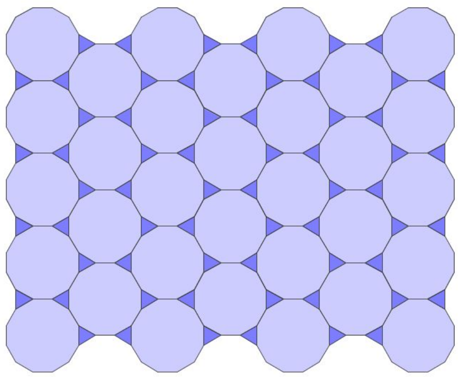


Imagen 21*

Los movimientos que observamos en los polígonos son los siguientes:

Encontramos la traslación en los cuadrados y en los octógonos de la forma siguiente:

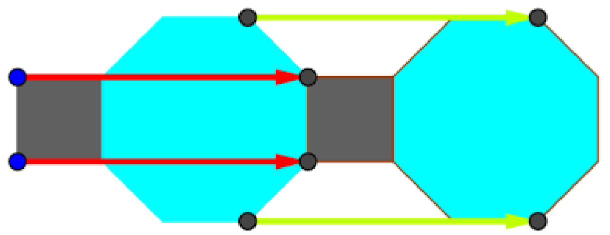


Imagen 22*

Vectores rojos : traslación de los cuadrados

Vectores verdes : traslación de los octógonos

Esta transformación también podemos observarla en nuestro polígono semirregular 12-12-3

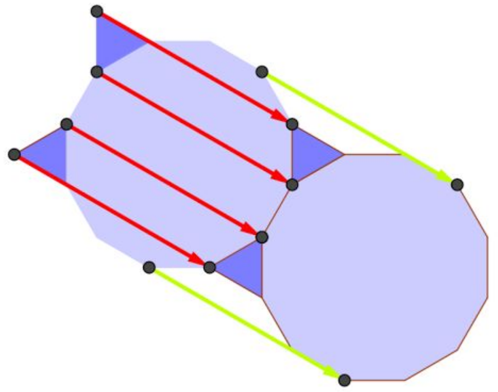


Imagen 23*

Vectores rojos: traslación de los triángulos

Vectores verdes: traslación de los dodecágonos

Además de este movimiento de traslación podemos ver este movimiento como una simetría axial.

Dentro de nuestra teselación esta imagen nos muestra las simetrías axiales de los cuadrados y octógonos respecto a los ejes marcados.

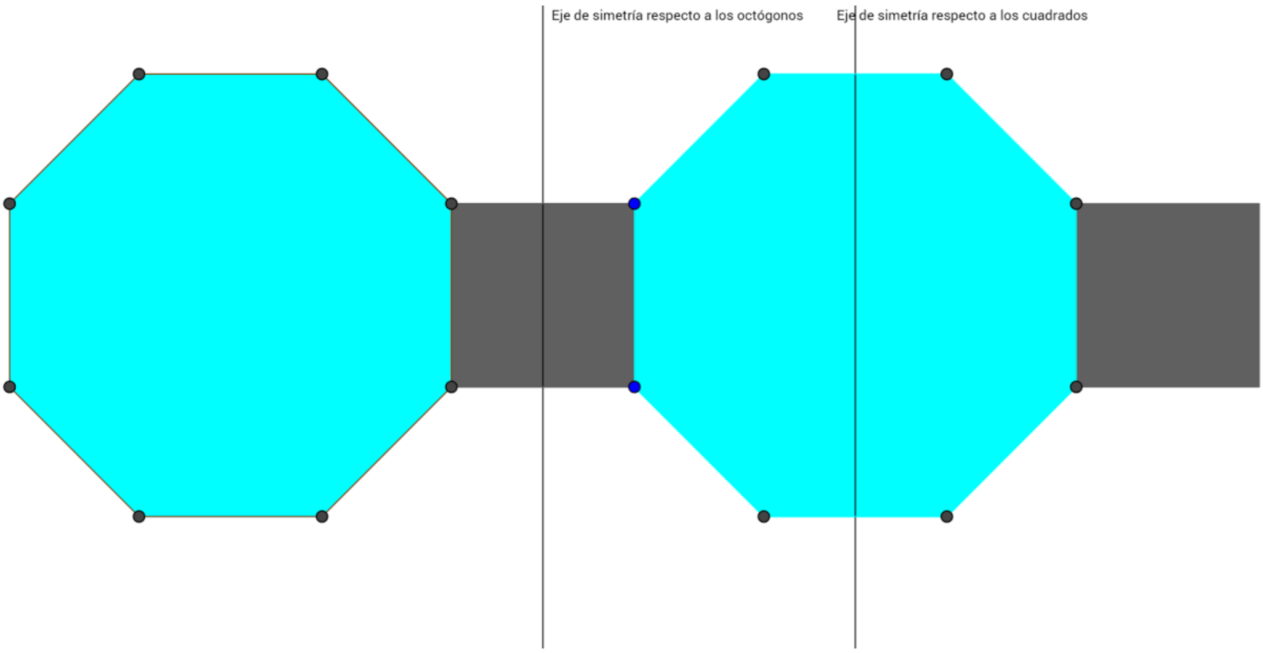


Imagen 24*

Este tipo de movimiento también es visible en nuestra teselación, esta imagen nos muestra la simetría axial de los triángulos respecto a los ejes marcados:

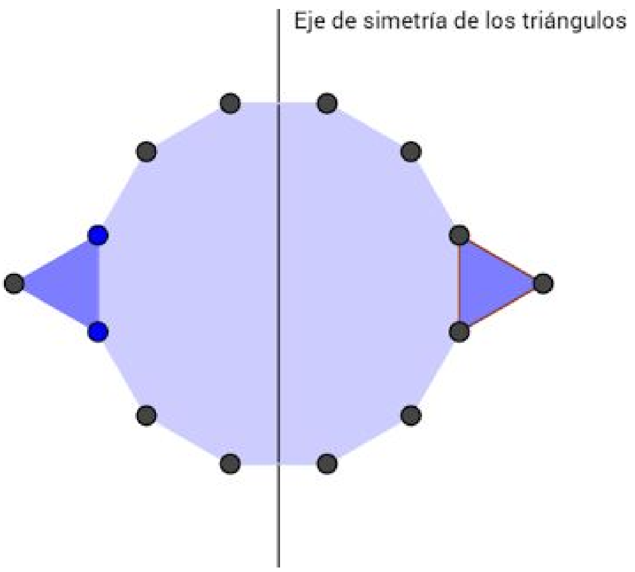


Imagen 25*

Otro movimiento que encontramos dentro de nuestros polígonos semirregulares, es la rotación.
En la teselación 12-12-3 observamos una rotación de los dodecágonos y en los octógonos de la teselación 8-8-4 que mostraremos a continuación:

En primer lugar observamos una rotación retrógrada en los dodecágonos de la teselación 12-12-3 de 150º con respecto al punto marcado (punto rojo) .

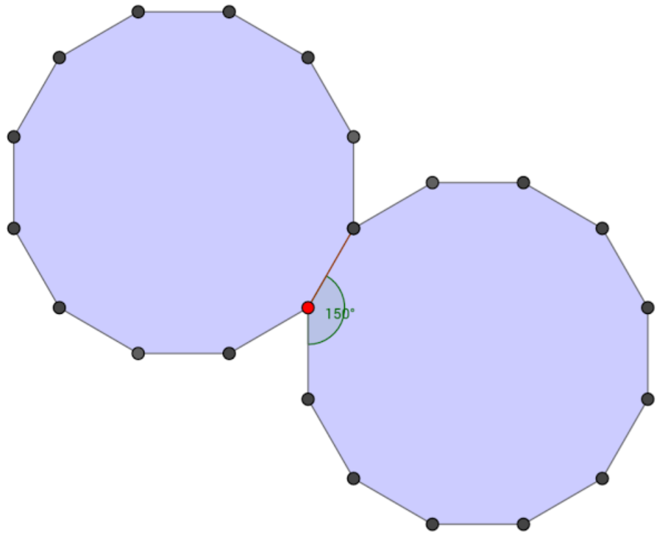


Imagen 26*

Además, encontramos este mismo movimiento en los octógonos de la teselación 8-8-4, en este caso de 135º y de nuevo se trata de una rotación retrógrada.

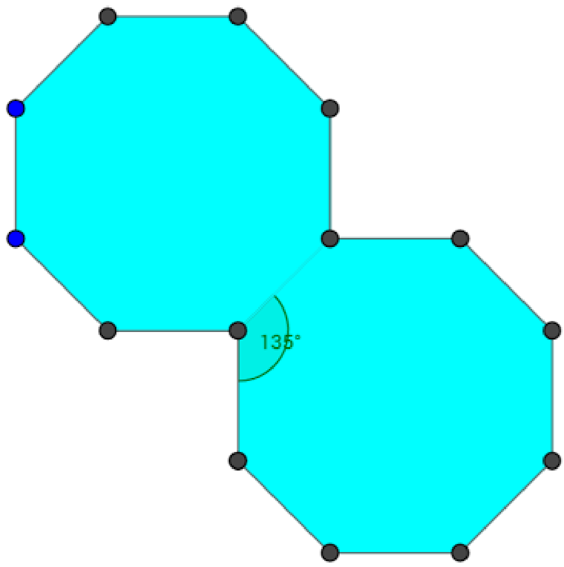
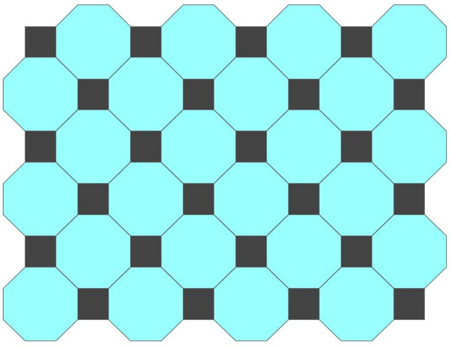


Imagen 27*

4 .Relación entre ambos polígonos semirregulares:



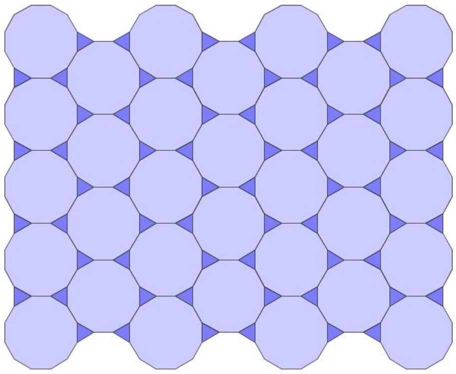


Imagen 28 *   Imagen 29*

Para comenzar veremos sus diferencias:

Cada teselación está formado por un tipo de polígonos regulares.

- 12-12-3 se crea a partir de dodecágono (12 lados) y triángulos (3 lados)
- 8-8-4 se crea partir de octógonos (8 lados) y cuadrados (4 lados)

Otra diferencia que podemos encontrar es la rotación que sufren en un caso los octógonos se trata de una rotación de 135º en cambio, en los dodecágonos es de 150º.

Además, existen diferencias claras en la composición de sus vértices:

- 12-12-3 : cada vértice consta de dos dodecágono cuyos ángulos internos son de 150º y un triángulo cuyo ángulo interno es de 60º.
- 8-8-4: cada vértice consta de dos octógono cuyos ángulos internos miden 135º y un cuadrado cuyo ángulo interno es de 90º.

A pesar de estas diferencias, encontramos similitudes entre ambos. En primer lugar, al estudiar los movimientos que sufren los polígonos regulares que los forman.
En ambas encontramos traslaciones, simetrías y rotaciones.

5. Conclusiones

Tras estudiar ambas teselaciones y haber buscado sus similitudes y diferencias podemos concluir con lo siguiente. Estos polígonos semirregulares tienen distinta composición, es decir está formado por distintos tipos de polígonos afectando a la composición de sus vértices. En cambio, su formación ocurre de la misma forma, utilizando los mismo movimientos, en este caso concreto traslaciones, simetrías y rotaciones.

6.Webgrafía:

· ABC. (2016). *Definción de polígono* consultado el 17 de marzo de 2016 en http://www.definicionabc.com/ciencia/poligono.php

· Autor desconocido. *Mosaicos semirregulares*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://www.acorral.es/mosasemi.htm

·

Autor desconocido, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://agrega.educacion.es/repositorio/08072011/a8/es_2011070812_9070801/semirregulares/semirregulares/soluciones.html

Autor anónimo Traslación consultado el 29 de marzo de 2016 http://www.vitutor.com/geo/vec/c_2.html

Autor anónimo Simetría axial consultado el 29 de marzo de 2016 http://www.vitutor.com/geo/vec/c_5.html

· Lasso, S. (2015). *Dodecágono, Qué es, fórmula de área y perímetro*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://arte.about.com/od/Que-es-el-arte/fl/Dodecagono.htm

Ortega, R. (2012). *Traslación y rotación*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://es.slideshare.net/BreNCairo/rotacin-y-traslacion

· Real Academia Española. (2016). *Polígono*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://dle.rae.es/?id=TXv6DAs

http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/teselacionesplano/tessellation-3-3-3-4-4.gif

· Universo Fórmulas. (2015). *Área del octógono regular*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/area-octogono-regular/

· Wordpress. (2016). *Definición de teselación*, consultado el 17 de marzo de 2016 en http://definicion.de/teselacion/

* imágenes de creación propia